

A FUTÁS ÉS SZÖKDELÉS TÖMEG-RUGÓ MODELL DINAMIKAI VISELKEDÉSÉNEK GLOBÁLIS FELTÉRKÉPEZÉSE ÉS PARAMÉTERHANGOLÁSA

Patkó Dóra¹, Nagy Ábel Mihály¹, Zelei Ambrus^{1,2}

¹ Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék

² MTA-BME Gépek és Járművek Dinamikája Kutatócsoport

zleci@mm.bme.hu

DOI: 10.17489/biohun/2022/1/308

Absztrakt

Annak ellenére, hogy a futás és szökdelés tömeg-rugó modellje (SLIP – spring-loaded inverted pendulum) nagyon széles körben alkalmazott, nem találtunk teljes térképet a stabil mozgások dimenziótlan paramétertartományaira és a vonzási tartományokra. A Buckingham-féle Π -tétel segítségével minimálisan szükséges paraméterhalmazt vezetünk be. Feltárjuk a konzervatív rendszer két dimenziótlan paraméterének és a dimenziótlan mechanikai energiának a 3D teret numerikus paraméterkövetés segítségével. A szakaszosan folytonos (hibrid dinamikai) rendszer stabilitási tulajdonságait a monodrómia mátrix numerikus számításával határozzuk meg. A mechanikai energia megváltoztatásával járó perturbációk esetére külön hangsúlyt fordítunk. A Nelder-Mead simplex módszer alkalmazásával úgy hangoljuk a modellt, hogy különféle mozgásformák utánzására legyen alkalmas, mint például a lassú futás és a sprintelés.

Kulcsszavak: futás, szökdelés, tömeg-rugó modell, szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek, stabilitás analízis

GLOBAL ANALYSIS AND PARAMETER TUNING OF THE DYNAMIC BEHAVIOUR OF THE SLIP MODEL OF RUNNING AND HOPPING

Abstract

Despite the fact that the spring-loaded inverted pendulum (SLIP) is possibly the most widely used model of running and hopping, we could not find a complete map of the dimensionless parameter regions of stable periodic solutions and the basin of attraction. We present a minimum set of independent physical parameters using the Buckingham Π theorem. The 3D space of two dimensionless physical parameters and the dimensionless total mechanical energy of the conservative system was discovered by means of numerical continuation. The stability analysis of the piecewise-smooth (hybrid dynamical) system was provided by the numerical calculation of the monodromy matrix. The explanation of the non-energy conserving perturbations was addressed. The Nelder-Mead simplex method was applied to tune the model parameters in order to imitate the motion characteristics of specific locomotion types such as moderate speed running and sprinting.

Keywords: running, hopping, SLIP model, piecewise-smooth dynamical systems, stability analysis

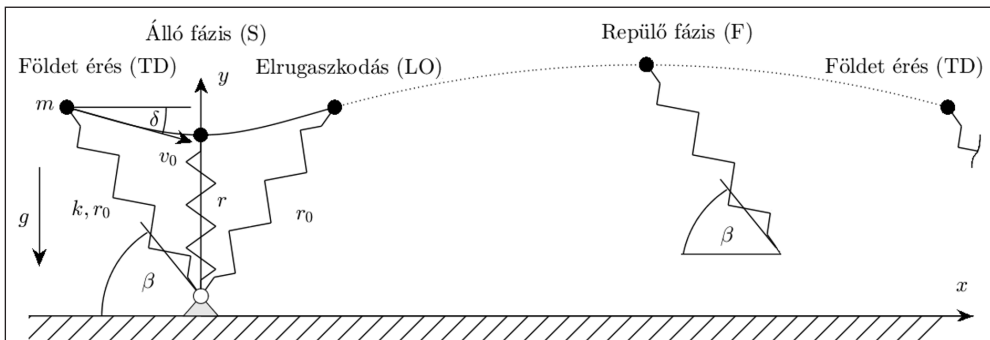
BEVEZETÉS

Az emberi járás és futás biomechanikájának megértésére már több száz éve erős törekvés irányul,¹ ennek ellenére nyitott kérdések továbbra is fennállnak. A Newtoni mechanika, a képrögzítési és mozgáskövetési eljárások, valamint a számítógépes szimulációs eszközök lendületet adtak a terület fejlődésének. A futás és szökdelés modellezésére számos mechanikai modell alakult ki a bonyolultság széles skáláját lefedve. A nagy szabadsági fokú modellek jellemzően leíró jellegűek és mérési adatok feldolgozását szolgálják.^{2,3} Ezzel szemben az alacsony szabadsági fokú modellek segítségével általában könnyen megvalósítható a teljes járás, szökdelés vagy futó mozgás generálása pusztán dinamikai egyenletek felhasználásával.^{4,5} Ezek a nemlineáris dinamikai modellek mérési adatok felhasználása nélkül képesek megjósolni a paraméterek megváltozásának hatását. Az ilyen, prediktív jellegű modellek közül az egyik legegyszerűbb és legelterjedtebb az ún. tömeg-rugó inverz inga modell⁶ (SLIP – *s*pring-*l*oaded *i*nverted *p*endulum), amely egy anyagi pontból és egy rugóból áll (1. ábra). A modell képes a futáshoz hasonlóan repülő és támasz fázisok produkálására. A modell az emberi mozgás leírására és annak megértésére irányult, hogy mi a hatása a mozgást jellemző paraméterek – mint például a frekvencia vagy a függőleges amplitúdó – megváltoztatásának. Blickhan a modell segítségé-

gével megmutatta, hogy az ember a rugalmas energia tárolására törekszik a futó és szökdelő mozgás során.⁶ A SLIP modellt és változatait a mai napig alkalmazzák.^{7,8} Lábakon közlekedő robotok mozgásának szabályozási algoritmusába közvetlenül beépíthető a modell.⁹ Az emberi mozgás szabályozásának és az emberi mozgástervezés mögötti optimális stratégiáknak az elemzését szolgáló prediktív dinamikai modellek is közvetlenül tartalmazzák a SLIP modellt.¹⁰

A SLIP modellnek számos kibővített változata megtalálható az irodalomban; a torzót reprezentáló tömegpont helyett gyakran merev test szerepel,⁴ mely a torzó elfordulását is képes modellezni. A rugó lineáris karakterisztikája helyettesíthető nemlineáris karakterisztikával, továbbá több lábú és térbeli kibővítéseket is alkalmaznak, melyről Holmes⁵ cikke átfogó összefoglalót ad. A több szegmensből álló modellek¹⁰ már nehezen alkalmazhatóak a futó mozgás generálására.

Sokan vizsgálták a SLIP modellt, de nem láltunk olyan átfogó paraméterelemzést vagy a paraméterek hatását kompakt módon bemutató térképet a szakirodalomban, amelynek segítségével könnyen kiválaszthatók lennének a stabil mozgást biztosító paraméterek. Jelen munkánkban bemutatjuk a SLIP modell dimenziótlan egyenleteit, a dimenziótlan paraméterek azon tartományait, ahol létezik



1. ábra. A SLIP modell mozgása és fázisai, a röppálya legalacsonyabb és legmagasabb pontja

periodikus mozgás. Bemutatjuk a stabilitást garantáló paramétertartományokat és megkeressük azokat a modellparamétereket, amelyek a legjobban illeszkednek az ember és egyes kétlábú állatok futásának biomechanikai paramétereire Ludwig¹¹ cikkében leírtakhoz hasonlóan. Összefoglaljuk a matematikai módszereket és a stabilitáselemzés főbb lépéseit, melyet nem találtunk meg a magyar nyelvű szakirodalomban.

MÓDSZEREK

A SLIP modell alapötlete és mozgásegyenletei megtalálhatóak Blickhan munkájában.⁶ Az m tömegű anyagi pont a futó testét annak kiterjedése nélkül modellezi, a k merevséggel és r_0 terheletlen hosszal rendelkező lineáris karakterisztikájú rugó a talajon támaszkodó lábat modellezi. A rendszer periodikus mozgása váltakozó támasz- és repülő fázisokból, valamint az azokat összekötő elrugaszkodás és földetérés eseményekből áll az *1. ábra* szerint. A repülő fázisban (F – flight) a tehetetlenség nélküli rugó nem befolyásolja a dinamikai viselkedést: a tömegpont parabolikus pályán halad, miközben a rugó β szögben áll.

A földetérés (TD – touchdown) akkor következik be, amikor a terheletlen láb eléri a talajt. A rugó a tömegpontot a talaj egy pontjához kapcsolja a talajfogást követő támasz fázisban (S – stance) egy csuklós kényszerrel. Az elrugaszkodás (LO – liftoff) akkor következik be, amikor a rugó visszanyeri eredeti hosszát, így a talaj és a láb közötti nyomóerő éppen megszűnik. Az elrugaszkodás után a rugó azonnal β szöghelyzetbe kerül, mely nem mond ellent a mechanika törvényeinek amiatt, hogy a rugó tehetetlensége teljes mértékben el van hanyagolva. A rendszer konzervatív, mely lehetővé teszi az állandó magasságú ugrások sorozataként kialakuló periodikus megoldásokat külső energia bevitele nélkül. Egy valódi élőlény esetében természetesen fellép energiavesztés

a szövetek csillapítása és a talajjal való rugalmatlan ütközés miatt, amelyet az izmok mechanikai munkája pótol elrugaszkodáskor. Így ugyancsak periodikus mozgás jön létre. A szakirodalomban^{4,6} elfogadott módon az energiavesztéseket és az izmok munkáját nem feltétlenül szükséges modellezni, a periodikus mozgást a konzervatív rendszer is reprodukálni tudja.

A SLIP modell stabil periodikus mozgását lehetővé tévő paraméterek feltérképezéséhez dimenziótlan változókat és paramétereket vezetünk be a Buckingham-féle Π –tétel segítségével.¹² A tétel szerint egy n számú változóra vonatkozó összefüggés átalakítható $p = n - d$ darab független dimenziótlan mennyiség közti összefüggéssé, ahol d az eredeti összefüggésben szereplő alapmennyiségek száma. A mozgásegyenletben szereplő $n=7$ változó a t idő, az x és y helykoordináták, az m tömeg, k rugómerevség, r_0 rugóhossz és g gravitációs gyorsulás. A $d=3$ alapmennyiség: kg, m, s. Tehát $p=4$ darab dimenziótlan mennyiség választható, amelyre több lehetőség van. Célszerű a $\xi = x/r_0$ és $\eta = y/r_0$ dimenziótlan helykoordináták, és a $\bar{t} = \sqrt{k/m}t$ dimenziótlan idő megválasztása. Így a támasz fázis mozgásegyenletei mindössze az $\mathbf{x} = [\xi \ \eta \ \xi' \ \eta']^T$ állapotváltozókat és a $\gamma = kr_0/(mg)$ dimenziótlan rugómerevség paramétert tartalmazzák:

$$\xi'' + \left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right)\xi = 0. \quad (1)$$

$$\eta'' + \left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right)\eta + \frac{1}{\gamma} = 0 \quad (2)$$

ahol $\bar{r} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ a pillanatnyi dimenziótlan rugóhossz. A nyújtatlan dimenziótlan rugóhossz $\bar{r}_0 = 1$. A \square jelölésű dimenziótlan idő szerinti derivált és az idő szerinti derivált összefüggése $\square = \sqrt{k/m} \square'$. Repülő fázisban $\bar{r}=1$ helyettesítéssel az (1) és (2) mozgásegyenletben a zárójeles tagok eltűnnek. Be-

vezetjük az $\bar{E} = E / (kr_0)^2$ dimenziótlan mechanikai összenergiát is:

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{1}{2}(\bar{r} - 1)^2 + \frac{\eta}{\gamma} \quad (3)$$

A két fázis (F és S) és az azokat összekötő események (TD és LO) alkotnak egy mozgásciklust, melyek együttes vizsgálata a szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek területére vezet. A periodikus pályák stabilitásának vizsgálatához kiszámítjuk a monodrómia¹³⁻¹⁸ mátrixot a (4) egyenlet szerint.

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_{TD} \mathbf{\Phi}_F \mathbf{S}_{LO} \mathbf{\Phi}_S \quad (4)$$

Egy periodikus pálya stabil, ha a \mathbf{C} minden sajátértéke egynél kisebb: $\lambda_i < 1, \forall i$. A (4) egyenletben szereplő $\mathbf{\Phi}_S$ és $\mathbf{\Phi}_F$ mátrixok rendre a támasz, illetve repülő fázisokhoz tartozó alap megoldási mátrixok, amelyeket a folytonos szakaszokhoz tartozó első variációs egyenlet megoldásával határozunk meg.¹³⁻¹⁸ Az \mathbf{S}_{LO} és \mathbf{S}_{TD} mátrixok rendre az elrugaszkodás $h_{LO}(\mathbf{x}) = 1 - \bar{r}$, illetve földetérés $h_{TD}(\mathbf{x}) = \eta - \sin \beta$ eseményeknek és a hozzájuk tartozó $\mathbf{g}_{LO}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ és $\mathbf{g}_{TD}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ugrásfüggvényeknek a gradiensét foglalják magukba. Ezek az ugrásfüggvények ebben a felírásmódban azonosságot jelentenek, de ahogy később is látni fogjuk, a modelltől és a felírásmódtól függően ez nem mindig igaz. A periódus elejét, azaz a Poincaré-metszetet a $\tilde{h}(\mathbf{x}) = h_{TD}(\mathbf{x})$ függvény definiálja, amely jelen speciális esetben egybeesik a földetérés eseményfüggvényével, de máshogy is megválasztható lenne. Ahhoz, hogy periodikus megoldás adódjon, a rugó végpontját minden periódus végén a globális koordináta-rendszer origójába képezzük a Poincaré-metszethez tartozó $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = [-\cos \beta \quad \eta \quad \xi' \quad \eta']^T$ ugrásfüggvény segítségével. Ezt azért tehetjük meg, mert ξ egy kvázi ciklikus koordináta, azaz a repülő fázisban nem befolyásolja, támasz fázisban pedig csak a talajfogási ponttól mért relatív helyzete befolyásolja a mozgást. A periodikus pályák

keresésével és stabilitásukkal kapcsolatos matematikai módszerek a szakirodalomban¹³⁻¹⁸ rendelkezésre állnak.

Alternatívaként bevezethető egy újabb ξ_G állapotváltozó, amely a talajfogási pont helyét jelöli. Ekkor $\hat{\mathbf{x}} = [\xi \quad \eta \quad \xi' \quad \eta' \quad \xi_G]^T$ az állapotváltozók vektora, és nincs szükség a fázis végén a ξ változó visszaképezésére, tehát $\tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}}$, továbbá a módosult leképezés $\mathbf{g}_{TD}(\hat{\mathbf{x}}) = [\xi \quad \eta \quad \xi' \quad \eta' \quad \xi + \cos \beta]^T$.

Az (5) általános alakban felírt mozgásegyenleteket a (6) első variációs egyenlettel együtt numerikusan integráljuk MATLAB környezetben az *ode45* függvény segítségével, a beépített eseménykeresési algoritmust felhasználva. Az alkalmazott abszolút és relatív hibahatár egyaránt 10^{-12} az előzetesen elvégzett szimulációs vizsgálatok alapján. Túlzottan kicsi hibahatár esetén a számítási idő növekszik meg, túl nagy hibahatár esetén a monodrómia mátrix sajátértékei válnak pontatlanná.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{\Phi}' = \mathbf{f}_x \mathbf{\Phi}; \quad \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{I} \quad (6)$$

A periodikus pályák megkeresésére Adolffson munkájában¹⁴ található iteráció kibővített változatát alkalmazzuk, mely a (7) és (8) egyenletekből indul ki. A (7) egyenlet fejezi ki, hogy a $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0, T)$ megoldás megegyezik az \mathbf{x}_0 kezdeti feltétellel, azaz a mozgás periodikus. A (8) egyenlet pedig arra utal, hogy a Poincaré metszetről indul a mozgás. Mivel a SLIP modellnél adott γ és β paraméterekre végtelen sok periodikus megoldás található, melyek különböző \bar{E}_0 mechanikai összenergiához tartoznak, felírjuk a (9) energia egyenletet is.

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0, T) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\tilde{h}(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (8)$$

$$\bar{E}(\mathbf{x}_0) - \bar{E}_0 = 0 \quad (9)$$

Az (5) \mathbf{x} -re vonatkozó megoldása $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0, t)$, melynek a kezdeti feltétel szerinti gradiense

$\Phi(\mathbf{x}_0, t)$. Az \mathbf{x}_0 kezdeti feltétel és T periódusidő körüli linearizálás után a (10) lineáris egyenletrendszer írható fel.

$$\begin{bmatrix} \Phi_c^+ - \mathbf{I} & \mathbf{f}_c^+ \\ \tilde{\mathbf{h}}_x(\mathbf{x}_0) & \mathbf{0} \\ \bar{E}_x(\mathbf{x}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_0 \\ \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c^+ \\ -\tilde{h}(\mathbf{x}_0) \\ \bar{E}_0 - \bar{E}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

ahol $\mathbf{x}_c^+ = \varphi(\mathbf{x}_0, t_c)$ az \mathbf{x}_0 -ból indított megoldás a t_c pillanatban, amikor a megoldás eléri a Poincaré-metszetet, azaz földet érésel befejeződik egy mozgásperiódus. Az $\mathbf{f}_c^+ = \mathbf{f}(\mathbf{x}_c^+, t_c)$ ugyanitt a Poincaré-metszet utáni függvény értéke és $\Phi_c^+ = \Phi(\mathbf{x}_0, t_c)$. A (10) egyenletrendszer az ismeretlenek számánál egynél több egyenletet tartalmaz, ezért a Moore-Penrose-féle¹⁹ általánosított inverz segítségével fejezhető ki az állapotváltozókra és periódusidőre vonatkozó $\Delta \mathbf{x}_0$ és ΔT növekmény, valamint a \mathbf{x}_0 és T új becslése. Az így kapott Newton-Raphson iteráció pár lépés után a periodikus megoldás kezdőpontját (a $\tilde{h}(\mathbf{x})$ Poincaré-metszet dőféspontja) jelentő \mathbf{x}_0^* -ba konvergál, ha megfelelő közelségből indítjuk. Nemlineáris rendszer lévén arra, hogy a kezdeti becslésnek és a megoldásnak milyen közel kell lenniük egymáshoz a konvergencia biztosításához, nincs általános iránymutatás. A vonzási tartomány rendszertől és paraméterektől függően változik.

A stabil paramétertartomány határát paraméterkövetés (parameter continuation) segítségével keressük meg, azaz a γ , β és \bar{E}_0 paramétert kis mértékben változtatjuk, majd alkalmazzuk az energiaegyenlettel kibővített Adolffson-féle iterációt az aktuális paraméterekhez tartozó periodikus megoldás megtalálására. A paraméterekben történő túl nagy ugrás miatt a (10) iteráció elveszítheti a konvergenciáját.

A paraméterek hangolásával adott mozgásformák szimulációjára tehetjük alkalmassá a modellt, pl. különböző sebességű futás, szökde-

lés, vagy akár különböző állatok mozgásának modellezése. Mivel az \mathbf{x}_0 becslésnek közel kell lennie az \mathbf{x}_0^* megoldáshoz, a paraméterek csak kis mértékben változtathatók új periodikus pálya keresése előtt. Tehát olyan módszerre van szükség a modell hangolásához, amely lokálisan vizsgálja a paramétertartományt. Továbbá deriváltak nélküli módszerre van szükség, hiszen nem garantálja semmi, hogy egy tetszőlegesen választott célfüggvény folytonos. Ezek miatt a Nelder–Mead szimplex módszer²⁰ választottuk, amely eleve biztosítja, hogy az iteráció során a γ , β és \bar{E}_0 paramétertérben ne következzen be túl nagy ugrás. Amennyiben a (10) iteráció nem konvergál, a szimplex algoritmus egy büntető értéket ad, és az iteráció más irányban vagy kisebb lépésben változtatott paraméterekkel próbálja keresni az optimumot. A Nelder–Mead algoritmust Matlab környezetben implementáltuk.

EREDMÉNYEK

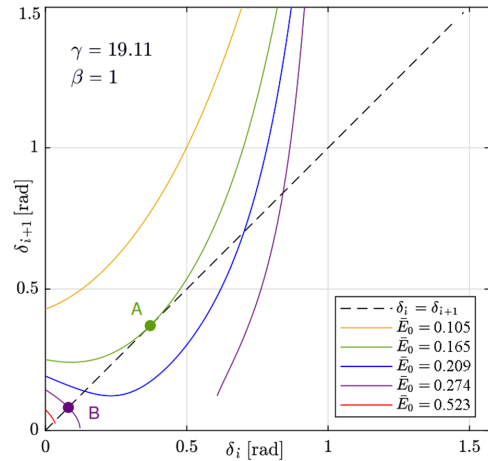
Különböző \bar{E}_0 összenergiákhoz tartozó periodikus pályák a 2. ábrán láthatóak. Megfigyelhető, hogy a repülő fázisban érvényes x irányú ξ' sebesség mentén tekintve a stabil periodikus pályákat instabilak határolják, illetve az is, hogy minél kisebb a haladási sebesség, annál nagyobbak az ugrások. A SLIP modell viselkedésének egyik szemléletes interpretációja a Poincaré-féle visszatérési térkép, mely a 3. ábrán látható az emberi mozgáshoz közel álló $\gamma = 19,11$ és $\beta = 1$ értékeknél. Egy tetszőlegesen választott skalár Poincaré metszeten vett i -edik értékéhez (vízszintes tengely) rendeli az egy periódussal későbbi, azaz $i + 1$ -edik értéket. Amennyiben nincs változás egy periódus alatt, a 45° -os szaggatott vonal jellemzi a dinamikai változó viselkedését. A sebességvektor vízszintestől mért $\delta = -\tan^{-1}(\eta' / \xi')$ szögét⁴ ábrázoljuk a földetérés pillanatában értelmezve. Az A pont feletti, 45° -nál nagyobb meredekségű metszéspontok instabil, míg az A pont alatti metszéspontok stabil megoldáso-

kat jelentenek. Az A pont a legkisebb energiához tartozik, amelynél még létezik periodikus pálya. A B ponthoz tartozik a legnagyobb összenergia, ahol még létezik stabil periodikus pálya.

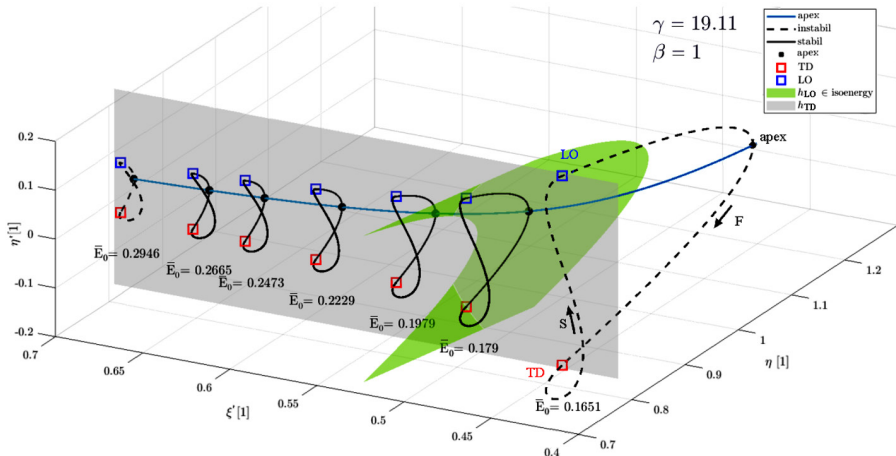
A 4. és 5. ábra a vonzási tartományokat szemlélteti rögzített γ és β értékeknél az összenergia és a repülő fázisban állandó értékű ζ' vízszintes sebesség illetve a δ szög síkján. A kék folytonos és a piros szaggatott görbék rendre a stabil és instabil periodikus megoldásokat jelölik. Megállapítható, hogy amennyiben egy energiaszinten maradván zavarjuk meg a mozgást (pl. ζ' vagy δ mentén), az visszatér a stabil pályára, míg ha az \bar{E}_0 mentén perturbáljuk a kezdeti feltételt, akkor nem tér vissza az eredeti pályához stabil megoldás esetén sem. Az 1., 2. és 3. jelű határgörbékén kívülről (halvány-sárga tartomány) indítva a mozgást a megoldás nem éri el újra a Poincaré-metszetet, azaz egy periódust sem tud megtenni anélkül, hogy eldőlné. Nem periodikus pályán indítva a rendszert, annak viselkedését a nyilak iránya jellemzi. A piros nyilak mentén haladva (fehér tartomány) a rendszer véges számú perióduson belül eléri valamelyik határgörbét az 1., 2.

és 3. számú közül és a SLIP modell elesik. A halványkékkel színezett vonzási tartományból (BoA – Basin of Attraction) indítva a rendszert a mozgás stabil periodikus pályához konvergál, amint a kék nyilak is mutatják. Az 1., 2., és 3. jelölések a 4. és 5. ábrán látható határgörbék egymásnak való megfeleltetését segítik.

A SLIP modell viselkedésével kapcsolatban a leginkább átfogó képet a stabilitási határok felderítése adja a γ , β és \bar{E}_0 paraméterterében,



3. ábra. A Poincaré-féle visszatérési térkép

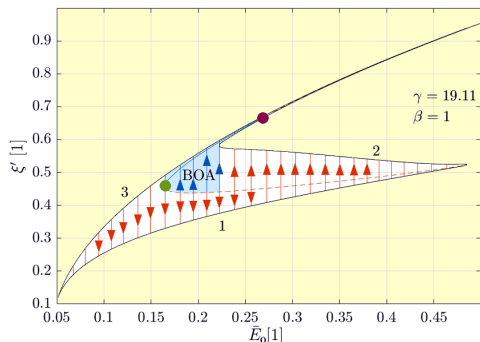


2. ábra. A periodikus pályák különböző mechanikai összenergiákon (fekete vonallal). A $h(\mathbf{x})$ események által meghatározott felületek zölddel (h_{LO}) és szürkével (h_{TD}) láthatóak. A ζ' tengely balról jobbra csökken

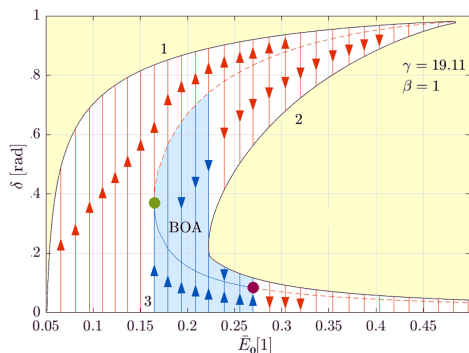
mely a 6. ábrán látható. A 6. ábra a különböző γ értékekhez tartozó vetületeket mutatja. A stabil tartomány térbeli szemléltetésére egy interaktív Matlab program²¹ is elérhető. A stabilitási határfelületek segítségével könnyen meghatározhatók olyan paraméter-beállítások, amelyekkel garantálható a stabil moz-

gás. Azonban még ekkor is kihívást jelenthet a kezdeti feltételek beállítása, melyhez a 4. és 5. ábra ad segítséget rögzített γ és β fizikai paraméterek esetén.

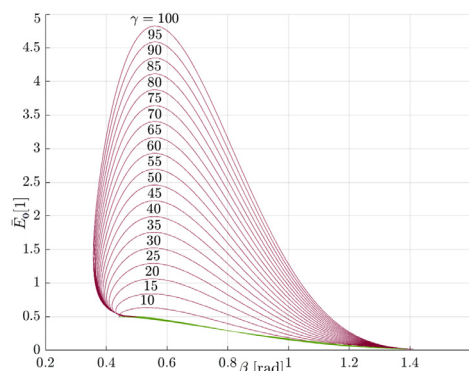
A 7., 8. és 9. ábrákon a Nelder–Mead szimplex módszerrel végrehajtott paraméterillesztések eredményei láthatóak. Hobbora cikkében²² egy 400 méter hosszú pályán álló helyzetből indulva sprinteltek a mérésben részt vevő személyek. A megtett út mentén jelentősen változik a futók mozgásformája a fáradás miatt



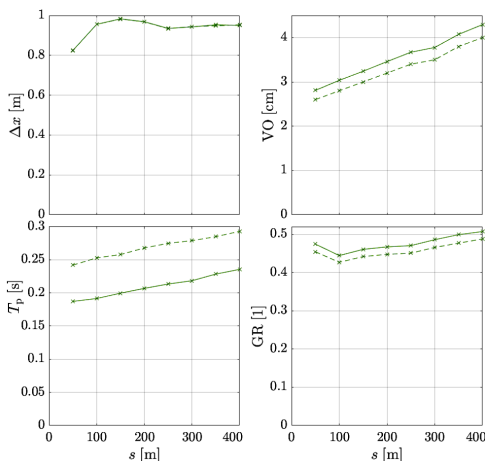
4. ábra. Vonzási tartomány, (\bar{E}_0, ξ') - sík



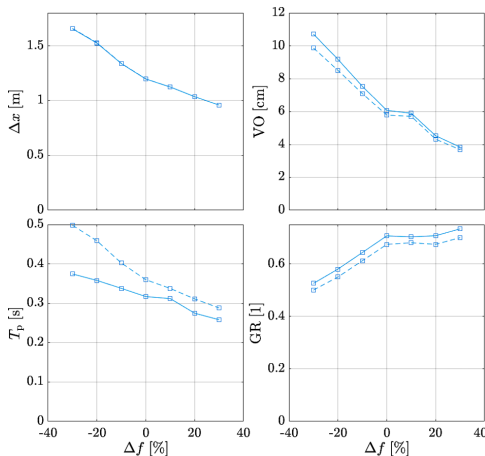
5. ábra. Vonzási tartomány, (\bar{E}_0, δ) - sík



6. ábra. A stabilitási térkép vetülete



7. ábra. Mérésekből²² (szaggatott) és a SLIP modell illesztésével kapott (folytonos) mutatószámok



8. ábra. Mérésekből²³ (szaggatott) és a SLIP modell illesztésével kapott (folytonos) mutatószámok

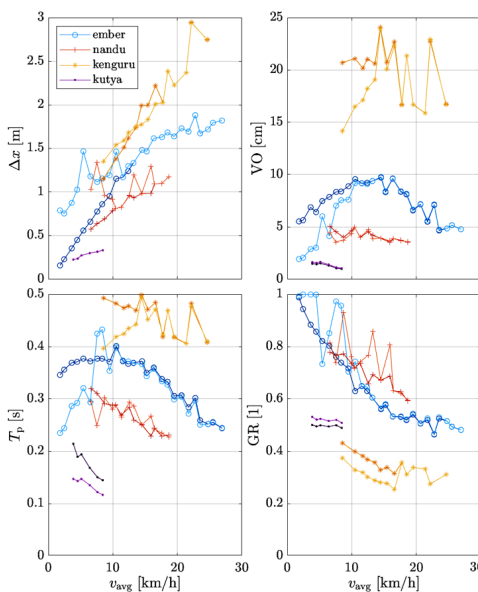
és stratégiai okokból. A Δx lépéshossz, a VO (vertical oscillation) függőleges irányú elmozdulás, a T_p periódusidő és a GR (ground ratio) talaj fázis időaránya paraméterek változására szolgáltat adatot a cikk. A SLIP modell γ , β és \bar{E}_0 és paramétereit úgy hangoltuk, hogy a modellből kapott és a mérésből származó Δx , VO, T_p és GR mutatószámok relatív hibáinak négyzetösszege (célfüggvény) minimális legyen (7. ábra).

A szimplex módszer kezdeti becslése a paramétertérben nagymértékben befolyásolja a konvergenciát. A mérési adatsorok első pontjában a kezdeti becslés a 6. ábrán látható stabil tartomány közepén volt ($\gamma = 30$, $\beta = 0,7$, $\bar{E}_0 = 0,8$). A további pontokhoz a kezdeti becslést mindig az előző pont eredménye szolgáltatta. A relatív hibák $R_x = 100(x_M - x_S)/x_M$ értékeit a 11. ábrán tüntettük fel (a mért értéket x_M , a szimulációval kapott értéket x_S jelöli). Morin²³ adataira vonatkozóan ugyanezt az illesztést hajtottuk végre azzal a

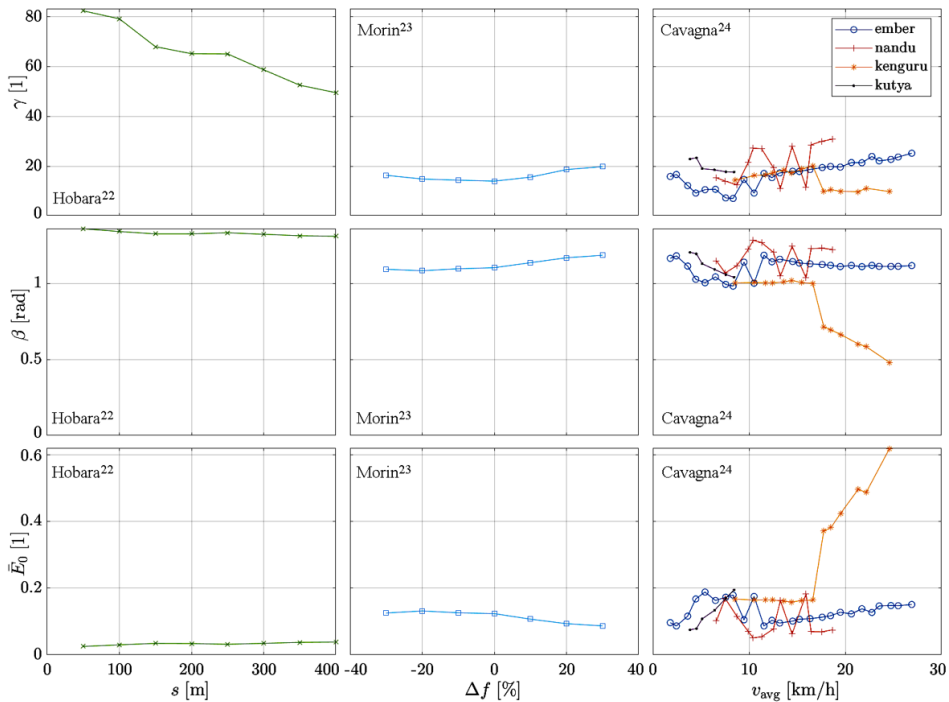
különbséggel, hogy a Δx , VO, T_p és GR mutatószámok a kényelmes lépésfrekvenciától való eltérés függvényében álltak rendelkezésre (8. ábra). Végül az átlagsebességet független paraméternek tekintve Cavagna²⁴ adataira is megtörtént az illesztés (9. ábra) négyféle gerinces esetén. Az illesztés eredménye minden esetben jelleghelyes. A számszerű eltérés oka, hogy a 4 mutatószám illesztésére mindössze három független paraméter állt rendelkezésre (γ , β és \bar{E}_0). A 10. ábrán a megfelelő γ , β és \bar{E}_0 paraméterértékek láthatók.

DISZKUSSZIÓ

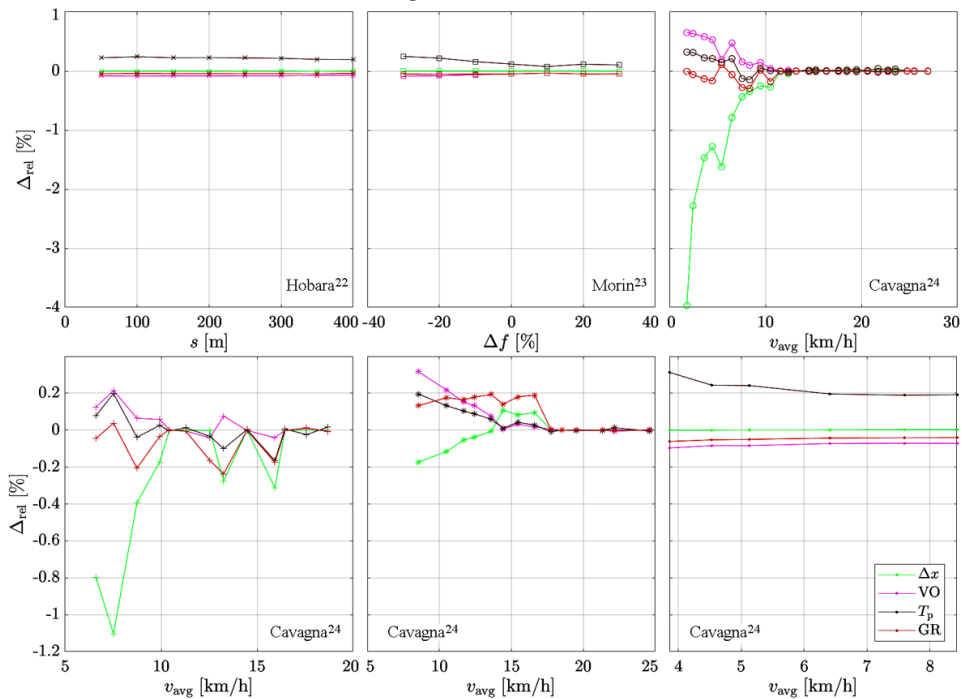
A periodikus pályák stabilitását a C monodrómia mátrix sajátértékei határozzák meg. A négy sajátérték között két darab egyes, egy zérus továbbá egy kezdeti értékektől és paramétereiktől függő van: $\lambda_1 = 1$, 1 , 0 , λ_4 . Az egyik egyes sajátérték a pályával érintőleges sajátirányhoz tartozik, mely abból adódik, hogy a rendszer autonóm. A zérus sajátérték a ξ irányú sajátvektorhoz tartozik. Értéke azért zérus, mert függetlenül a kezdeti értékektől a ξ minden periódus végén a $-\cos \beta$ értékbe képeződik vissza a $\vec{g}(\mathbf{x})$ ugrás függvény által. A kezdeti értékektől függő sajátérték azt mutatja meg, hogy amennyiben a c kezdeti érték $\xi_0^* + \Delta \xi_0^*$ megzavarása úgy történik, hogy nem változik meg a rendszer mechanikai energiája, akkor milyen a ξ_0^* kezdeti értékhez tartozó periodikus megoldás stabilitása. A második egyes sajátérték azért szerepel, mert a rendszer konzervatív, így mikor a $\xi_0^* + \Delta \xi_0^*$ zavarás hatására megváltozik a mechanikai összenergia, az a mozgás mentén végig állandó marad. Következésképp, a rendszer csupán marginálisan lehet stabilis. Mit jelent ez a zavarás okozta hiba alakulására vonatkozóan? Amennyiben a zavarás olyan, hogy nem változik meg a rendszer mechanikai összenergiája, a megoldás továbbra is az eredeti \bar{E}_0 izoenergia felületen mozog, amennyiben a λ_4 sajátérték kisebb,



9. ábra. Mérésekből²⁴ (sötét) és a SLIP modell illesztésével kapott (világos) mutatószámok



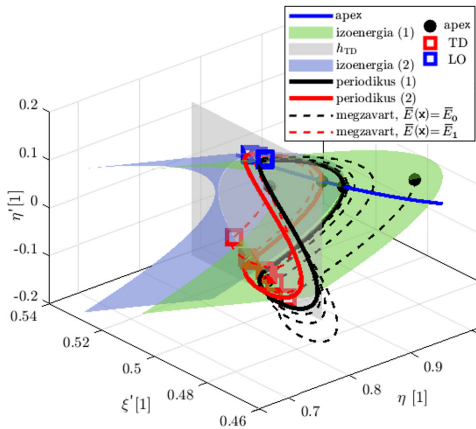
10. ábra. A SLIP modell paramétereit a mérési adatokra²²⁻²⁴ illetve



11. ábra. Az illesztések relatív hibái a Δx , VO, T_p és GR mutatószámokra

mint egy, a megoldás egyre közelebb fog kerülni a periodikus megoldás trajektóriájához, a hiba eltűnik. Ha megváltozik a mechanikai összenergia, a megoldás másik $\bar{E}(\mathbf{x}) = \bar{E}_1$ izoenergia felületre kerül, melyek között külső beavatkozás nélkül nincs átjárás (12. ábra).

Egy bizonyos energiaintervallumon belül léteznek periodikus pályái a rendszernek, és ezen periodikus pályák döféspontjai a Poincaré-metszeten egy folytonos görbét rajzolnak ki. Általános zavarásra az mondható el, hogy az eredeti pályagörbéhez képesti hiba egy részre eltűnik, ahogy a megoldás az új összenergiához tartozó periodikus megoldásához közelít, viszont marad egy fennmaradó eltérés, mely a két különböző összenergiához tartozó periodikus megoldás távolságából adódik.



12. ábra. Periodikus megoldások eltérő összenergiák esetén a pálya legmagasabb pontjáról (apex) indítva

Az ötváltozós esetben még egy egyes sajátérték keletkezik: $\lambda_1 = 1, 1, 0, \lambda_4, 1$. Ezen kívül bizonyos sajátértékekhez tartozó sajátvektorok iránya és jelentése megváltozik. A zérus sajátértékhez tartozó sajátvektor iránya ξ_G lesz, mivel minden periódusban a talajhoz rögzítés során előírjuk az értékét. Az újonnan megjelenő egyes sajátérték sajátiránya vele, illetve a másik ciklikus koordinátával, ξ_G -vel lesz összeköttesben, méghozzá az alábbi módon:

$$\mathbf{v}_5 = [a, 0, 0, b, a]^T \quad (11)$$

ahol a és b skaláris értékek. Az 1 értékű sajátérték azt jelenti, hogy ha az ξ_1 irányban adott $\Delta \xi_1$ értékkel módosított pozícióból indul a mozgás, akkor a periódus végén éppen $\Delta \xi_1$ távolsággal lesz arrébb.

Az eredményeink egybevágóak Ghigliazza és Rummel cikkeiben^{4,25} publikáltakkal. Ezen felül cikkünk 6. ábráján ismertetett, a SLIP modell minden dimenziótlan paraméterének terében megalkotott stabilitási térkép még inkább segíti a modell megértését, és a stabil periodikus pályák létezését garantáló paraméterkombinációk megválasztását, hiszen a térkép a teljes paramétertartományt lefedi. A modell viselkedését mozgás során 3D-s fázistérben mutattuk be, melyeken szemléltettük az izoenergia görbék jelentőségét.

A paraméterillesztések az instabil paraméter-tartományba is kiengedték a szimplexet. Ezt azért tehettük meg, mivel a valóságban az instabil periodikus pályákat szabályozással stabilá lehet tenni. A stabil periodikus pályák szépsége a konzervatív SLIP modell esetében az, hogy a rendszer önbeálló, nem igényel külső beavatkozást. Ha a szimplexet nem engednénk ki az instabil tartományba, akkor önbeálló stabil mozgás jönne ki ugyan, de nagyobb lenne az illesztett biomechanikai paraméterekben a hiba. Érdeemes megjegyezni, hogy kis sebességeknél a SLIP modell nehezen illeszthető mérési adatokra, mert a modell stabil paraméter-tartománya kis sebességeknél csökken. Az illesztés pontosságát továbbá az is befolyásolja, hogy a modell három paramétere hangolható csupán, míg az illeszteni kívánt biomechanikai paraméterek száma négy. A modell kibővítésével és paraméterei számának növelésével várhatóan az illesztések is pontosabbak lennének. A 10. ábrán jól látszik, hogy a SLIP modell paraméterei jellemzően milyen tartományba esnek valódi mozgások utánzása esetén.

IRODALOM

1. *Novacheck TF*. The biomechanics of running. *Gait and Posture*. 1998;7(1):77-95.
2. *Otten E*. Inverse and forward dynamics: models of multi-body systems. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. B: Biological Sciences* 2003;358(1437):1493–1500.
3. *Czaplicki A, Silva MT, Ambrósio JC*. Biomechanical Modelling for Whole Body Motion Using Natural Coordinates. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2004;42(4):927-44.
4. *Ghigliazza RM, Altendorfer R, Holmes P, Koditschek D*. A Simply Stabilized Running Model. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2003;2(2):187-218.
5. *Holmes P, Full RJ, Koditschek DE, Guckenheimer J*. The Dynamics of Legged Locomotion: Models, Analyses, and Challenges. *SIAM Review*. 2006;48(2):207-304.
6. *Blickhan R*. The spring-mass model for running and hopping. *Journal of Biomechanics*. 1989;22(11/12):1217-1227.
7. *Andrada E, Blickhan R, Ogihara N, Rode C*. Low leg compliance permits grounded running at speeds where the inverted pendulum model gets airborne. *Journal of Theoretical Biology*. 2020;494:110227.
8. *Masters SE, Challis JH*. Increasing the Stability of The Spring Loaded Inverted Pendulum Model of Running with a Wobbling Mass. *Journal of Biomechanics*. 2021;123:110527.
9. *Hutter M, Remy CD, Hopfänger MA, Siegwart R*. SLIP Running with an Articulated Robotic Leg. In *proc. 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010, 18-22 October, Taipei, Taiwan, 4934-9.
10. *Millard M, Kubica E, McPhee J*. Forward dynamic human gait simulation using a SLIP target model. In *proc. Procedia IUTAM 2011 Symposium on Human Body Dynamics*. 2011, 5-8 June, Waterloo, Canada, 142-57.
11. *Ludwig C, Grimmer S, Seyfarth A, Maus HM*. Multiple-step model-experiment matching allows precise definition of dynamical leg parameters in human running. *J Biomechanics*. 2012;45(14):2472–5.
12. *Buckingham E*. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review*. 1914;4(4):345-76.
13. *Müller PC*. Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos, Solitons and Fractals*. 1995;5(9):1671-81.
14. *Adolfsson J, Dankowicz H, Nordmark A*. 3D passive walkers: finding periodic gaits in the presence of discontinuities. *Nonlinear Dynamics*. 2001;24(2):205-29.
15. *Dankowicz H, Piiroinen PT*. Exploiting discontinuities for stabilization of recurrent motions. *Dynamical Systems*. 2002;17(4):317–42.
16. *Leine RI, van Campen DH*. Discontinuous bifurcations of periodic solutions. *Mathematical and Computer Modelling*. 2002;36(3)259-73.
17. *Piiroinen, PT, Dankowicz, J*. Low-cost control of repetitive gait in passive bipedal walkers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2005;15(6):1959-73.
18. *Dieci L, Lopez L*. Fundamental matrix solutions of piecewise smooth differential systems. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2011;81(5):932-53.
19. *Penrose R, Todd JA*. A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1955;51(3):406-13.
20. *Nelder JA, Mead R*. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*. 1965;7(4):308-313.
21. *Patkó D, Nagy AM*.: Matlab eszköz a SLIP modell stabil paraméter- tartományának interaktív bemutatására. [Internet] [cited: 2022.02.28.] Available from: https://www.mm.bme.hu/~patko_dora/SLIP_3Dmap.zip
22. *Hobara H, Inoue K, Gomi K, Sakamoto M, Muraoka T, Iso S, Kanosue K*. Continuous change in spring-mass characteristics during a 400 m sprint. *Journal of Science and Medicine in Sport*. 2010;13(2):256-61

-
23. *Morin JB, Samozino P, Zameziati K, Belli A G.* Effects of altered stride frequency and contact time on leg-spring behavior in human running. *Journal of Biomechanics.* 2007;40(15):3341-8.
24. *Cavagna GA, Franzetti P, Heglund NC, Willems P.* The determinants of the step frequency in running, trotting and hopping in man and other vertebrates. *The Journal of Physiology.* 1988;399(1):81-92.
25. *Rummel J, Seyfarth A.* Stable running with segmented legs. *The International Journal of Robotics Research.* 2008;27(8):919-934.
-

A jelen publikációban a BME-n folyó kutatások eredményei jelennek meg. Támogatást nyújtott a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (projekt azonosítók: TKP2021 BME-EGA, NKFIH FK-18 128636)

Zelei Ambrus

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék

H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

Tel.: (+36) 1 463-3678